UNIDAD 4: LÍMITE

¿Límite? ¿Eso no estaba en la unidad anterior? ¡Ya lo vimos!
Si, es cierto. Ya hablamos del concepto de límite, ya calculamos unos cuantos tipos de límite. Es cierto.
Pero esos límites eran de sucesiones de números naturales. Ahora, vamos a hablar de límiten en general, para funciones de cualquier tipo.
Además, antes sólo trabajamos límites en el infinito. De hecho, para +∞. En esta unidad, vamos a ver límites en los que x puede tender a cualquier cosa, ya sea +∞, -∞, 0 ó cualquier otro número.

Muchas de las cosas que vimos antes, valen para límites en general, y las vamos a seguir usando. Lo que sólo vale para sucesiones, pero no para límites en general, son los Criterios de D'Alambert y Cauchy.

Recordemos qué es lo que vimos de límite en la unidad anterior:

Teorema del sandwich: Si f(x), g(x) y h(x) son sucesiones tales que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ y además $\lim_{n\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} h(x) = L$, entonces se cumple siempre que: $\lim_{n\to\infty} g(x) = L$.

Propiedades

* Suma / Resta de límites: $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$ (el límite de la suma/resta es la suma/resta de los límites)
* Multiplicación: $\lim_{n\to\infty}(a_n . b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right).\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)$
* División: $\lim_{n\to\infty}(a_n : b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) : \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)$
* Potencia: $\lim_{n\to\infty}\left(a_n^{b_n}\right) = \lim_{n\to\infty} a_n^{\lim_{n\to\infty} b_n}$
* Raíz: (sirve si $a_n \geq 0$ para todo n) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[r]{a_n} = \sqrt[r]{\lim_{n\to\infty} a_n}$
* Multiplicación por un número "k": $\lim_{n\to\infty}(k.a_n) = k.\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)$
* "Cero por acotada": Si f(x) → 0 y g(x) está acotada, $\lim_{x\to\infty}(f(x).g(x)) = 0$.
* Esta se usa si tenemos la potencia entre un número y una sucesión:

Si f(x) → +∞ cuando x → +∞ ➔ $\lim_{x\to+\infty} r^{f(x)} = \begin{cases} 0 & \text{si } |r| < 1 \\ \infty & \text{si } |r| > 1 \end{cases}$

Indeterminaciones

$\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$; $\infty . 0$; 0^0 ; 1^∞ ; ∞^0 ; $\infty - \infty$

* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} \to 0$ y $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} \to \infty$

División de polinomios (ojo, esto vale si x → +∞)

*Si grado P(x) > grado de Q(x) ➔ $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \infty$

*Si grado P(x) = grado de Q(x) ➔ $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{p}{q}$ (acá tenemos que dividir los coeficientes principales de los polinomios para saber a qué tienden. El coeficiente principal es el numerito que multplica a la n de grado más grande)

*Si grado P(x) < grado de Q(x) ➔ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ (por ejemplo, $f(x) = \frac{1}{x}$)

* También vale usar los límites con e, si x → +∞
* Además, podemos usar lo de multiplicar y dividir por el conjugado.

Límites en el infinito

Vamos a resolver algunos límites en el infinito, un poco distintos de los de la unidad anterior:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x^7 - 10x^5 + 3\right)$

Tomemos factor común x^7:

$$\lim_{x\to+\infty} (x^7 - 10x^5 + 3) = \lim_{x\to+\infty} x^7 \left(1 - \underbrace{\frac{10}{x^2}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{3}{x^7}}_{\to 0}\right) = \lim_{x\to+\infty} x^7 .1 = +\infty$$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x^5 - x^6 + \sqrt{x}\right)$

Reescribimos la expresión, sacando factor común x^6:

$$\lim_{x\to+\infty} (x^5 - x^6 + \sqrt{x}) = \lim_{x\to+\infty} x^6 \left(\frac{x^5}{x^6} - 1 + \frac{x^{1/2}}{x^6}\right) = \lim_{x\to+\infty} x^6 \left(\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} - 1 + \underbrace{\frac{1}{x^{11/2}}}_{\to 0}\right) = \lim_{x\to+\infty} - x^6 = -\infty$$

(por ser una potencia par, se mantiene el signo + del ∞. Pero el menos adelante lo hace negativo)

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x}$

Vamos a usar "cero por acotada". No te olvides que los senos y los cosenos están acotados, porque toman valores sólo entre -1 y 1.
Entonces:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\operatorname{sen}x}{x-\cos x}\underbrace{=}_{\text{factor común}}\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)}{x\left(1-\frac{\cos x}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{\operatorname{sen}x}{x}}{1-\frac{\cos x}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\overbrace{\frac{1}{x}}^{\to 0}.\overbrace{\operatorname{sen}x}^{\text{acotada}}}{1-\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}.\underbrace{\cos x}_{\text{acotada}}}=\frac{1+0}{1-0}=1$$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{|5-x|}{5-x}$

Siempre que te encuentres con un módulo, tenés que "abrirlo", para mirar cada caso. Acá, como x → +∞ ➔ |5 - x| = - (5 - x) porque 5 - x < 0 para x > 5. Entonces:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{|5-x|}{5-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-(5-x)}{5-x}=-1$$

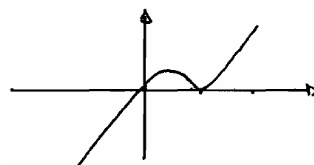
Ahora vamos a calcular algunos límites para +∞ y para -∞: (vamos a ayudarnos con dibujos de las funciones)

5) $\lim\limits_{x\to\infty}x^3-x^2$

$$\lim_{x\to\infty}x^3-x^2=\lim_{x\to\infty}x^3\left(1-\frac{x^2}{x^3}\right)=\lim_{x\to\infty}x^3\left(1-\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}\right)$$

Entonces, $x^3 - x^2$ se comporta como x^3 si x es grande (positivo o negativo) y x^3 → +∞ si x → +∞. Por otro lado, x^3 → -∞ si x → -∞. Entonces:

$$\lim_{x\to\pm\infty}x^3-x^2=\pm\infty$$



6) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-5x^2}{x+3}$

Como antes, sacamos factor común:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-5x^2}{x+3}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x(x^2-5x)}{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-5x}{1+\underbrace{\frac{3}{x}}_{\to 0}}=\lim_{x\to\pm\infty}x^2-5x=+\infty\to$$

porque el x de mayor grado es par, así que el signo es siempre positivo

El gráfico de esta función ya es más complicado, se va a estudiar más adelante. Veamos un dibujo en donde se nota el "comportamiento" para valores grandes de x:



7) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2-2x+3}-x$

Sacamos factor común x^2 adentro de la raíz:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2-2x+3}-x = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2\left(1-\underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{3}{x^2}}_{\to 0}\right)}-x = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2}-x = \lim_{x\to\pm\infty} |x|-x$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-2x+3}-x = \lim_{x\to+\infty} |x|-x = \lim_{x\to+\infty} x-x = 0$$

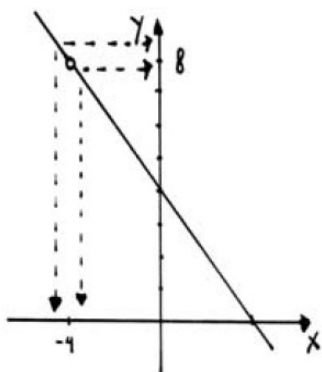
$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-2x+3}-x = \lim_{x\to+\infty} |x|-x = \lim_{x\to+\infty} -x-x = \lim_{x\to+\infty} -2x = -\infty$$

<u>Límite en un punto</u>

Pensemos en la función $\frac{16-x^2}{x+4}$ Su dominio son todos los números reales menos el -4.
Aunque f(-4) no está definida, f(x) la podemos calcular en cualquier x cercano a -4.
Por ejemplo f(-4,01) = 8,01 y f(-4,001) = 8,001 o también f(-3,99) = 7,99 y f(-3,999) = 7,999. Entonces cuando x se acerca a -4 por la izquierda o por la derecha la función se acerca a 8.
Podemos decir que el "límite" de f(x) cuando x tiende a -4 es 8 y lo escribimos:

$$\lim_{x\to-4} \frac{16-x^2}{x+4} = 8$$

Si x ≠ -4 podemos simplificar f(X):



$$\frac{16-x^2}{x+4} = \frac{(x+4)(x-4)}{x+4}$$

f(x) = 4 – x. Como vemos en la figura, el gráfico de f(x) es caso como el de la función lineal Y = 4 – x, solo que nuestra f(x) tiene un hueco en el lugar que corresponde a x = - 4. Al mismo tiempo las flechas punteadas nos muestran que si x se acerca a -4, f(x) se acerca a 8.

Definición intuitiva

Si f(x) puede aproximarse todo lo que queremos a un número finito L, tomando x suficientemente cercano pero distinto de un número Q, acercándonos por el lado izquierdo y derecho entonces:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Esta idea de acercarnos a un número nos alcanza para calcular un límite, por ejemplo si x se acerca a 2, la función f(x) = 2x + 6 se acerca a 10, es decir:

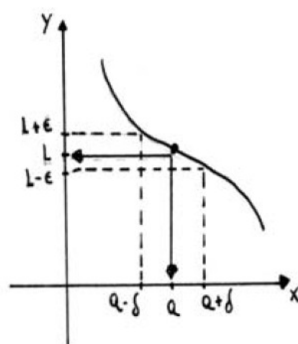
$$\lim_{x \to 2} f(x) = 10$$

¿ Pero cómo demostramos este resultado ? Necesitamos una definición precisa para el límite:

Definición de límite

Imaginemos que f(X) está definida en un intervalo abierto que contiene al número Q (puede no estar definida en el propio Q). Entonces:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$



Significa que para todo ϵ > 0 existe un δ > 0 tal que si: | f(X) – L | < ϵ entonces | X-a | < δ. Si miramos la figura la definición dice que todo X en el intervalo (Q-δ ; Q+δ) con la posible excepción del propio Q, tiene su imagen f(X) en (L-ϵ ; L+ϵ).

Podemos ahora demostrar que

$$\lim_{x \to 2} (2x + 6) = 10$$

Para cualquier ϵ > 0 tenemos que encontrar un δ > 0 tal que si | 2X+6-10 | < ϵ entonces | X-2 | < δ. Comencemos: | 2X+6-10 | = | 2X-4 | = 2 | X-2 | . Entonces si 2 | X-2 | < ϵ → | X-2 | < ϵ/2. Solo se necesita escoger δ = ϵ/2 para que | X-2 | < δ.

Dado un ϵ pudimos hallar un δ, entonces pudimos demostrar el límite. Casi siempre vamos a tener que calcular el límite y no demostrarlo. Cuando decimos que X tiende a

Q por la izquierda estamos hablando de un "límite lateral" y los escribimos: X → Q^-. Si X tiende a Q por la derecha diremos X → Q^+. Nos encontramos ahora con la siguiente conclusión: si los límites laterales existen y son iguales entonces existe el límite de f(X) y tiene el mismo valor:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = L$$

Los límites laterales deben ser X → Q iguales para que exista el límite f(X); pero ¿ Puede una función f(X) tener límites distintos en un valor Q ? La respuesta a la pregunta es el …

Teorema de Unicidad: Si existe lim $\lim_{x\to a} f(x) = L$ entonces es único.

La demostración es útil para que veas de dónde sale, pero lo que te van a pedir es que uses el resultado. Pero siempre sirve entender un poco más de dónde vienen las cosas, para entenderlas mejor.

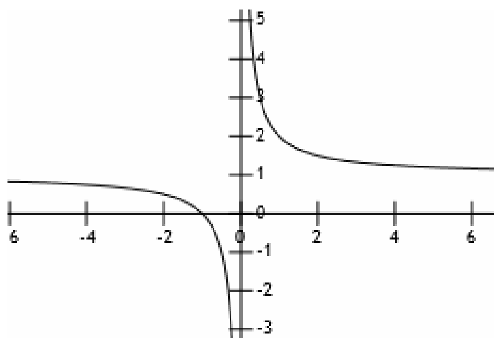
Asíntotas horizontales y verticales

Una aplicación de lo que vimos recién son las asíntotas, que son como "paredes" de la función, lugares adonde el gráfico se acerca infinitamente.

Las **asíntotas horizontales** (y = a) existen cuando uno (o los dos) de los límites infinitos tiende a un número finito. O sea, no tenemos asíntota horizontal cuando el límite infinito tiende, justamente, a infinito (como en un polinomio), o no se puede calcular (por ejemplo, la función f(x) = x . sen x). En resumen:

$$AH = y = a = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L \in R$$

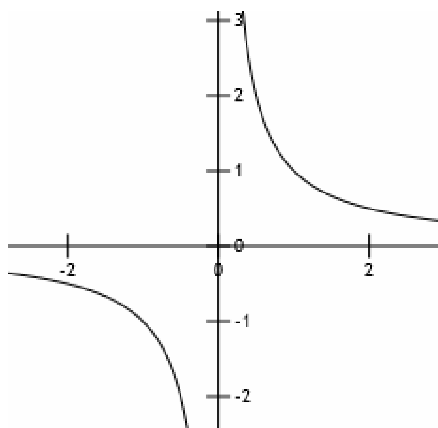
Ejemplo: f(x) = $\frac{x+1}{x}$ tiene una asíntota horizontal en y = 1



Las **asíntotas verticales** (x = b) existen cuando pasa lo contrario. O sea, el límite cuando x tiende a un número finito tiende a ±∞. Esto suele pasar, por ejemplo, para funciones como 1/x, donde el denominador se anula en x = 0, o ln (x - 1), donde hay una "pared" a partir de x = 1, que es a partir de donde empieza el dominio. En varios casos, tenemos que calcular límites laterales para ver el comportamiento de la función en ese punto (o puntos) donde hay un "problema". Por ejemplo, tenemos que calcular el límite, si el tema es en x = 1, para 1^+ y para 1^-. Vas a ver que no siempre valen lo mismo. En resumen:

$$AV = x = b = \lim_{x \to b} f(x) = \pm\infty$$

Ejemplo: $f(x) = \dfrac{1}{x}$ tiene una asíntota vertical en x = 0



Un error muy común es considerar cualquier valor "fuera de dominio" como una asíntota vertical. Volvamos al ejemplo de la función $\dfrac{16 - x^2}{x + 4}$. ¿Te acordás qué pasaba en x = -4? Ahí había una indeterminación, pero no era una asíntota, era un "agüjero".

Cuando lleguemos a la unidad de estudio de funciones, vamos a ver **asíntotas oblicuas**. Por ahora, vamos a trabajar sólo con verticales y horizontales.

Vamos a hacer algunos ejemplos más:

1) Calcular, según corresponda, los límites infinitos y los límites laterales que permitan detectar asíntotas horizontales y/o verticales. Hacer, en cada caso, un gráfico que refleje la información obtenida.

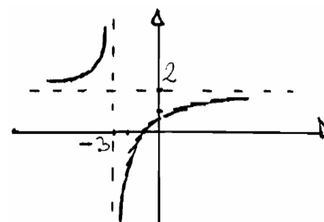
a) $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x + 3}$ b) $f(x) = \dfrac{5x^2}{x + 3}$ c) $f(x) = e^{\frac{x+1}{x}}$

d) $f(x) = \ln x$ e) $f(x) = (1/2)^x$ f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1 - x}}{\sqrt{1 - x^2}}$

a) Veamos primero cómo son los límites infinitos. Saquemos factor común x:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\overbrace{\frac{1}{x}}^{\to 0}}{1+\underbrace{\frac{3}{x}}_{\to 0}}=\frac{2}{1}=2 \Rightarrow \text{tenemos una AH en } y = 2$$

Como x = -3 no pertenece a Dom f, veamos sus límites:



$$\lim_{x\to -3+}\frac{2x+1}{x+3}=\frac{-5}{0^+}=-\infty \text{ y } \lim_{x\to -3-}\frac{2x+1}{x+3}=\frac{-5}{0^-}=+\infty$$

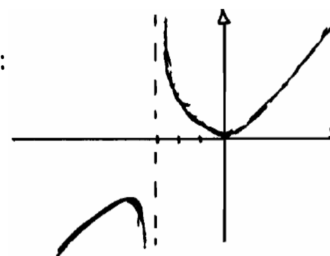
Entonces, tenemos una AV en x = -3.

---

b) Límites en el infinito:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2}{x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2}{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x}{1+\underbrace{\frac{3}{x}}_{\to 0}}=\pm\infty \Rightarrow \text{No hay AH.}$$

Veamos los límites en x = -3, que no pertenece a Dom f:



$$\lim_{x\to -3+}\frac{5x^2}{x+3}=\frac{5.9}{0^+}=+\infty \text{ y } \lim_{x\to -3-}\frac{5x^2}{x+3}=\frac{5.9}{0^-}=-\infty$$

Entonces, tenemos una AV en x = -3.

---

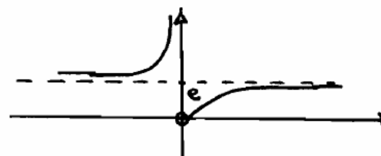
c) Trabajemos el exponente:

$$\lim_{x\to\infty} e^{\frac{x-1}{x}}=\lim_{x\to\infty} e^{\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x}}=\lim_{x\to\infty} e^{1-\overbrace{\frac{1}{x}}^{\to 0}}=e^1=e \Rightarrow \text{Hay una AH en } y = e$$

Veamos qué pasa en x = 0 (no está en Dom f)

$$\lim_{x\to 0+} e^{\frac{x-1}{x}}=\lim_{x\to 0+} e^{\frac{-1}{0^+}}=e^{-\infty}=\frac{1}{e^{\infty}}=0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0-} e^{\frac{x-1}{x}}=\lim_{x\to 0-} e^{\frac{-1}{0^-}}=e^{+\infty}=+\infty$$

Entonces, por lo que pasa en 0^-, hay una AV en x = 0



---

d) Su dominio es (0 ; +∞), así que de acá sacamos que hay una posible AV en x = 0, por ser el extremo de Dom f. Veamos el límite para +∞ y para 0^+ (para -∞ y para 0^- no tiene sentido porque está fuera de dominio).

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to 0+} \ln x = -\infty$

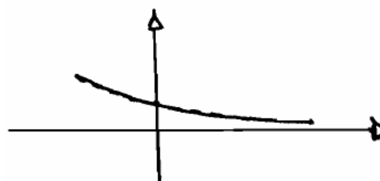


---

e) Esta es una función exponencial, así que no tiene problemas de dominio (Dom f = R), y no va a tener asíntotas verticales. Veamos los límites infinitos:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2^x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\underbrace{2^x}_{\to 0+}} = \frac{1}{0} = +\infty$$



Entonces, tenemos una AH en y = 0

Nota: si tenés una función exponencial del tipo $a^x + b$, donde a y b son números reales cualquiera (como 1, 2 ó e), y x es la variable, el término independiente b (el "número suelto") va a ser siempre su asíntota horizontal. Esto se puede comprobar calculando los límites infinitos.

---

f) Veamos el dominio:

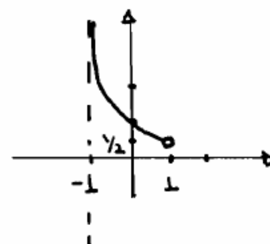
$1 - x \geq 0$ por el numerador ➔ $1 \geq x$ ➔ $x \leq 1$

$1 - x^2 > 0$ por el denominador ➔ $1 > x^2$ ➔ $x^2 < 1$ ➔ $-1 < x < 1$

Si juntamos los dos conjuntos, nos queda que el dominio de f(x) es (-1 , 1). No podemos tomar límites en el infinito, porque están fuera de dominio. Así que veamos qué pasa en los extremos del dominio, o sea, en -1^+ y en 1^-:

$$\lim_{x\to-1+}\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{0^+}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+1-}\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2}} \underbrace{=}_{\frac{0}{0}} \lim_{x\to+1-}\sqrt{\frac{1-x}{1-x^2}} = \lim_{x\to+1-}\sqrt{\frac{1-x}{(1-x)(1+x)}} = \lim_{x\to+1-}\sqrt{\frac{1}{1+x}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$



---

2) Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{x^4-2}{x^3}$ b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{4x-12}$ c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-1}{x-2}-\dfrac{x^2+x-2}{x^2-2x}$

d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$ f) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$ g) $\lim\limits_{x\to 0} x^2.\text{sen}(1/x)$

a) El valor x = 0 no pertenece al Dom f. Calculamos el límite:

$$\lim_{x\to 0+}\frac{x^4-2}{x^3} = \frac{-2}{0^+} = -\infty \Rightarrow \text{Hay una AV en } x = 0$$

Tenemos un cociente de polinomios. Sacamos factor común x^3:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-2}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(x-\frac{2}{x^3}\right)}{x^3}=\lim_{x\to\infty}x-\underbrace{\frac{2}{x^3}}_{\to 0}=\pm\infty$$

---

b) Si reemplazamos el valor x = 3 en la expresión, nos queda una indeterminación de tipo 0/0. Para resolverla, factoricemos los polinomios. Busco las raíces del numerador, que es una cuadrática con a = 1, b = -2 y c = -3:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4.a.c}}{2.a}=\frac{2\pm\sqrt{4-4.1.(-3)}}{2.1}=\frac{2\pm 4}{2}\Rightarrow x_1=3\quad y\quad x_2=-1$$

Y en el denominador tomamos factor común 4. Entonces el límite nos queda:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{4x-12}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+1)}{4(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+1}{4}=\frac{4}{4}=1$$

Para el límite infinito, podríamos tomar factor común x en el numerador y en el denominador, o hacer algo más fácil: aprovechar que ya simplificamos, y tomar límite directo desde ahí. Entonces:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x-3}{4x-12}=\lim_{x\to\infty}\frac{\overbrace{x+1}^{\to\infty}}{4}=\pm\infty$$

---

c) Si evaluamos en x = 2 nos encontramos con 3/0 - 4/0 = ∞ - ∞, que es una indeterminación. Restemos las fracciones buscando denominador común:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x-2}-\frac{x^2+x-2}{x^2-2x}=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-x-x^2-x+2}{x(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-x^2-2x+2}{x(x-2)}=\frac{8-4-4+2}{2.0}=\infty$$

Para los límites infinitos, tomamos factor común x^2:

$$\lim_{x\to\infty}=\frac{x^2-1}{x-2}-\frac{x^2+x-2}{x^2-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^2-2x+2}{x^2-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(x-1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-1-\overbrace{\frac{2}{x}}^{\to 0}+\overbrace{\frac{2}{x^2}}^{\to 0}}{1-\underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{1}=\pm\infty$$

---

d) Si evaluamos en x = 2 queda una indeterminación 0/0. Multiplicamos y dividimos por el conjugado:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}\cdot\frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2-4}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}=\frac{1}{\sqrt{2+2}+2}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

No podemos tomar el límite cuando $x \to -\infty$, porque no lo permite el dominio de f(x). Tomamos el límite para $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}=\frac{1}{\infty}=0$$

---

e) podemos recordar el resultado que obtuvimos en sucesiones: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$. Y además sabemos que si $f(x) \to L$ cuando $x \to x_0$ ➔ $f(x_n) \to L$ cuando $x_n \to x_0$. Con esto podemos decir que $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt[x]{x}=1$.

---

f) Hagamos esta sustitución $^1/_x = z$. Entonces, si $x \to 0^+$ ➔ $z \to +\infty$. Reemplazamos:

$$\lim_{x\to 0+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{z\to+\infty}\frac{e^{-z}}{z^{-1}}=\lim_{z\to+\infty}\frac{z}{e^{z}}=0$$

---

g) El argumento del seno es $^1/_x$ que tiende a infinito si $x \to 0$. Pero el sen $(^1/_x)$ se mantiene acotado sin importar el argumento. Como $x^2 \to 0$ si $x \to 0$, tenemos entonces el famoso "cero por acotado". Entonces $\lim_{x\to 0}\underbrace{x^2}_{\to 0}.\underbrace{\text{sen}\left(1/x\right)}_{\text{acotado}}=0$.

Límites especiales

En la mayoría de los ejercicios vamos a usar este resultado, que es muy importante:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}x}{x}=1}$$

La demostración es fácil usando la Regla de L'Hopital, que vamos a ver más adelante. Por ahora, lo usamos directamente.

Ojo: esto sólo sirve si $x \to 0$. Es muy importante que te fijes eso antes de usarlo.

Veamos ejemplos:

Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}3x}{2x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{tg}x}{2x}$ c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\text{sen}(x^2+x-6)}{x^2+x-6}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x+4\text{sen}2x}{x^2+5\text{sen}x}$ f) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x+4}\right)^{\frac{2x^2+1}{x-3}}$ g) $\lim\limits_{t\to 0}(1+3t)^{1/t}$

a) Multiplico y divido por 3: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}3x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}3x}{2x}.\dfrac{3}{3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3}{2}\underbrace{\left(\dfrac{\text{sen}3x}{3x}\right)}_{\to 1}=\dfrac{3}{2}$

---

b) Usando la identidad $\text{tg}x=\dfrac{\text{sen}x}{\cos x}$, reescribo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{tg}x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}x}{\cos x}.\frac{1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}.\underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\to 1}.\underbrace{\frac{\text{sen}x}{x}}_{\to 1}=\frac{1}{2}$$

---

c) Como x^2 + x - 6 → 0 cuando x → 2, podemos usar esta sustitución: x^2 + x - 6 = t. Entonces si x → 2 ➔ t → 0 para conservar el valor del límite:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\text{sen}t}{t}=1\Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{\text{sen}(x^2+x-6)}{x^2+x-6}=1$$

---

d) Como cos x → si x → 0, entonces tenemos una indeterminación 0/0. Vamos a multiplicar y dividir por el conjugado de 1 - cos x. Veamos: (no te olvides que 1 - $\cos^2$x = sen^2x)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}.\frac{1+\cos x}{1+\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{1-\cos^2 x}^{\text{sen}^2x}}{x(1+\cos x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}^2x}{x(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\underbrace{\left(\frac{\text{sen}x}{x}\right)}_{\to 1}.\frac{\overbrace{\text{sen}x}^{0}}{1+\underbrace{\cos x}_{\to 1}}=\frac{0}{2}=0$$

---

e) Fijate bien lo que hacemos acá:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x+4\text{sen}(2x)}{x^2+5\text{sen}x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x+\dfrac{4\text{sen}(2x).2x}{2x}}{x^2+\dfrac{5\text{sen}x.x}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{3x+8x.\overbrace{\left(\dfrac{\text{sen}(2x)}{2x}\right)}^{\to 1}}{x^2+5x.\underbrace{\left(\dfrac{\text{sen}x}{x}\right)}_{\to 1}}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x+8x}{x^2+5x}=\lim_{x\to 0}\frac{11x}{x^2+5x}==\lim_{x\to 0}\frac{11x}{x(x+5)}=\lim_{x\to 0}\frac{11}{x+5}=\frac{11}{0+5}=\frac{11}{5}$$

---

f) Como en sucesiones, usaremos que $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$.

Empecemos trabajando en la base. Sumo y resto 4 en el numerador:

$$\left(\frac{3x+1}{3x+4}\right)=\left(\frac{3x+1+4-4}{3x+4}\right)=\left(\frac{3x+4}{3x+4}+\frac{-3}{3x+4}\right)=\left(1+\frac{-3}{3x+4}\right)=\left(1+\frac{1}{\frac{3x+4}{-3}}\right)$$

Ahora agregamos el exponente:

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x+4}\right)^{\frac{2x^2+1}{x-3}}=\lim_{x\to\infty}\underbrace{\left(1+\frac{1}{\frac{3x+4}{-3}}\right)^{\frac{3x+4}{-3}}}_{\to e}{}^{\cdot\frac{-3}{3x+4}\cdot\frac{2x^2+1}{x-3}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{-3}{3x+4}\cdot\frac{2x^2+1}{x-3}}$$

El exponente queda $\frac{-6x^2-3}{3x^2-5x-12}$. Como tenemos una indeterminación de tipo ∞/∞, sacamos factor común x2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-6x^2-3}{3x^2-5x-12}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(-6-\overbrace{\frac{3}{x^2}}^{\to 0}\right)}{x^2\left(3-\underbrace{\frac{5}{x}-\frac{12}{x^2}}_{\to 0}\right)}=-\frac{6}{3}=-2$$

Luego:

$$\lim_{x\to\infty}e^{-2}$$

---

g) Este límite es fácil si realizamos el siguiente cambio de variables:
$t=1/x \Rightarrow x=1/t$ y si veamos que t → 0 ➔ x → ∞. Entonces el límite queda:

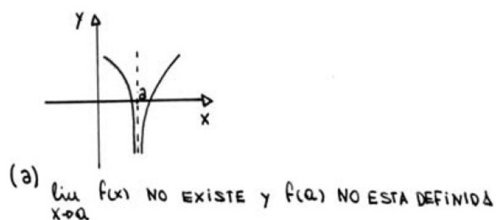
$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x=\underbrace{\left[\left(1+\frac{1}{x/3}\right)^{x/3}\right]}_{\to e}{}^{\cdot 3/\cancel{x}\cdot\cancel{x}}=e^3$$

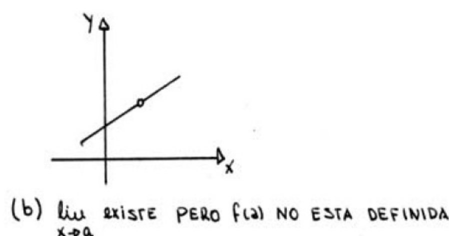
Finalmente queda e^3.

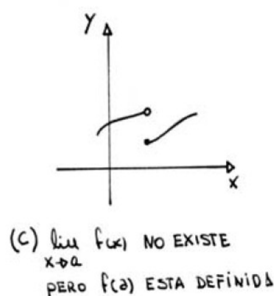
Continuidad

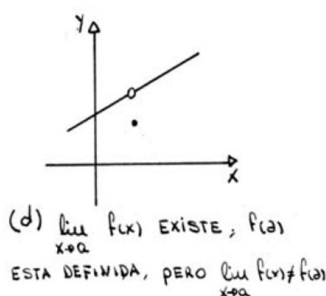
Vamos a estudiar en esta parte la continuidad de las funciones. La idea de continuidad es fácil, es algo así como poder dibujar la gráfica de una función sin levantar el

lápiz del papel, una curva sin interrupciones. Veamos algunos ejemplos de gráficos de funciones que NO son continuas en el valor a.









En todos los ejemplos anteriores la gráfica tiene un hueco o una interrupción. Tenemos que dar ahora una definición precisa de continuidad.

Continuidad en un número a

f(x) es una función continua en un número a si se cumplen las tres condiciones siguientes:

i) f(a) tiene que estar definida en Q.

ii) lim de f(x) con x → Q tiene que existir finito.

iii) Deben coincidir los valores: f(a) = lim de f(x) con x → Q.

Veamos un ejemplo que quiere decir todo esto:

Supongamos que $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

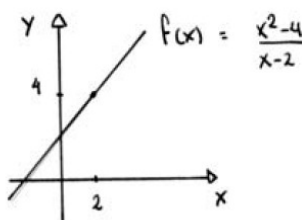
El único valor de X en el cual la función f(x) parece tener inconvenientes es en x = 2, entonces estudiemos la continuidad en X = 2.

i) f(2) está definida y vale 4

ii) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x+2)(x-2)}{x-2} = 4$

iii) Se cumple que f(2) = al lim de f(x) con x → 2 porque ambas valen 4.

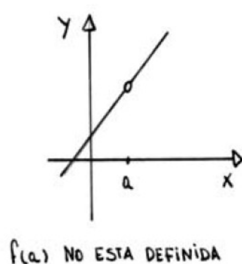
Entonces f(x) es una función continua en x = 2, su gráfica no tiene que presentar ninguna interrupción.

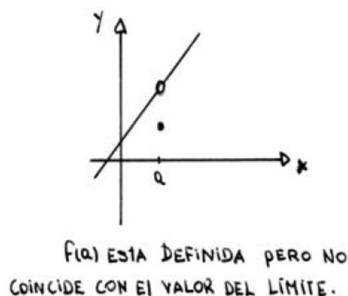


Ya conocemos cuales son las funciones continuas, ahora veamos bien cuáles son las discontinuidades:

Clasificación de las discontinuidades.

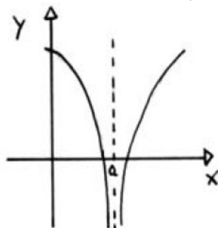
* Discontinuidades evitables:
Son aquellas en las que el lim de f(x) con x → 2 existe y f(a) o no está disponible o no coincide con el valor del límite.
Dibujemos las dos situaciones:





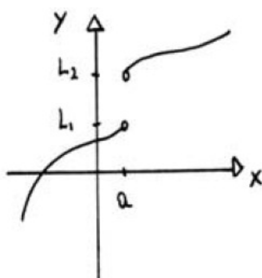
En los dos casos la discontinuidad "puede" ser evitada si definimos el valor f(a) como el resultado del límite.

* Discontinuidad no evitable:
Hay dos casos de discontinuidades que no podremos evitar, las discontinuidades infinitas y las discontinuidades de salto.
"Discontinuidad infinita"
Si el límite de f(x) con x → Q no existe finito (es infinito) tendremos una asíntota vertical y la discontinuidad será infinita (o esencial)



"Discontinuidad de salto"
Es cuando los límites laterales existen pero no son iguales:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_1 \ ; \ \lim_{x \to a^+} f(x) = L_2 \ ; \ L_1 \neq L_2$$



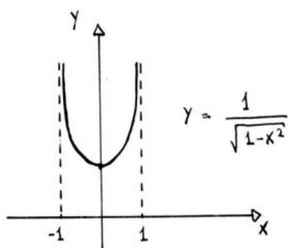
Veamos que justo en X = a la función parece saltar de h1 a h2.
Todo lo que estuvimos hablando fue sobre la continuidad en un punto Q, pero que podemos decir sobre la continuidad de una función en un intervalo ? ?

Continuidad en un intervalo

Una función f(x) es continua en un "intervalo abierto" (a,b) si lo es en todo número del intervalo.
Una función f(x) es continua en un "intervalo cerrado" [a,b] si es continua en el abierto (a,b) y además:

$$\lim_{x \to a+} f(x) = f(a) \quad y \quad \lim_{x \to b-} f(x) = f(b)$$

O sea, para que una función sea continua en un valor, los límites tienen que coincidir a ambos lados.
Por ejemplo la función f(x) = $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ es continua en el intervalo abierto (-1 , 1) pero no lo es en el intervalo cerrado [-1,1], porque ni f(-1) ni f(1) están definidas.



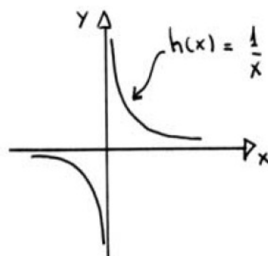
Nos toca ahora estudiar las propiedades y teoremas de las funciones continuas. Comencemos con las propiedades y operaciones que se pueden hacer con las funciones continuas:

Algebra de funciones continuas

* La suma o resta de dos o más funciones continuas en un punto a es otra función continua en el punto a.
* El producto de dos o más funciones continuas en un punto a es otra función continua en un punto a.

* El cociente de dos funciones en un punto a es otra función continua en el punto a si el denominador no es cero en a.

En esta última operación tenemos que tener cuidado de que el denominador no sea cero, por ejemplo f(x) = 1 es una función continua para todo valor de x y g(x) = x también, sin embargo la función h(x) = f(x) / g(x) = 1/X no es continua en x = 0; h(x) = 1/x tiene una discontinuidad infinita en x = 0, eso quiere decir que tenemos una asíntota vertical en x = 0.

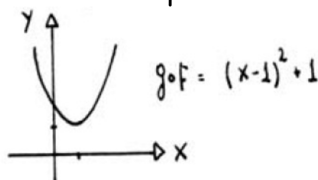


Bueno, vamos a ver ahora cuales son los teoremas de las funciones continuas, comencemos con uno que es bastante intuitivo:

* La composición de dos funciones continuas es otra función continua. Como un ejemplo de este teorema veamos la composición entre las funciones f(X) = x – 1 y g(x) = x^2 + 1 que son dos funciones continuas para todo valor de X:

$(g \circ f) (x) = g (f(x)) = g (x - 1) = (x - 1)^2 + 1$

Y esta es sin duda una función continua para todo X.



Las funciones continuas en un intervalo cerrado siempre tienen un valor máximo y uno mínimo, o sea que es una función "acotada".

Vamos con ejemplos:

1) Determinar los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones. Ver si en esos puntos la discontinuidad es evitable o no.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} & \text{si} \quad x \neq 1 \\ 2 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2}{1 - \cos x}$

a) La función está definida $\forall x \in R$. Nos interesa saber si las dos ramas empalman bien, es decir, sí $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} = 2$. Entonces calculemos el límite. Como tiene una indeterminación de tipo 0/0, factoreo el numerador:

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) \text{ (factorizando)}$$

$$\frac{x^3-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} \underset{\substack{\text{pues}\\ x\neq 1}}{=} x^2+x+1 \Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} x^2+x+1 = 3 \neq 2$$

Como el límite no da 2, tenemos una discontinuidad no evitable en x = 1. Podríamos evitarla si la segunda función fuera y = 3.

---

b) La función tiene problemas en x = 0 y en x = 2kπ (múltiplos pares de 2π). Veamos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}.\frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2(1+\cos x)}{1-\cos^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2(1+\cos x)}{\text{sen}^2 x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\underbrace{\left(\frac{x}{\text{sen}x}\right)^2}_{\to 1}.(\underbrace{1+\cos x}_{\to 2}) = 2 \quad \text{(discontinuidad evitable)}$$

$$\lim_{x\to 2\pi}\frac{x^2}{1-\cos x} = \lim_{x\to 2\pi}\frac{(2\pi)^2}{1-\cos 2\pi} = \frac{4\pi^2}{0} \to \infty \quad \text{(discontinuidad esencial o no evitable)}$$

---

2) Determinar el valor de la constante a para que las siguientes funciones resulten continuas:

$$a)\ \begin{cases} x^2+ax & \text{si } x\leq 2 \\ a-x^2 & \text{si } x\geq 2 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} e^{1/x} & \text{si } x\neq 0 \\ a & \text{si } x=0 \end{cases}$$

a) La función está comporqueta por los polinomios, que son continuos para todo x; pero tenemos que ver que las 2 ramas empalmen bien:

$$\lim_{x\to 2-} x^2+ax = \lim_{x\to 2+} a-x^2 \Rightarrow 4+2a = a-4 \Rightarrow a = 8$$

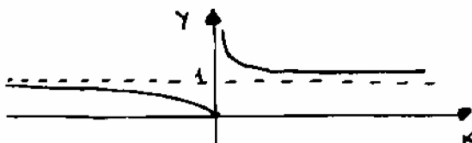
$$\text{Entonces } f(x) = \begin{cases} x^2+8x & \text{si } x\leq 2 \\ 8-x^2 & \text{si } x>2 \end{cases}$$

---

b) Veamos qué sucede si hacemos x -> 0 por izquierda y por derecha:

$$\lim_{x\to 0+} e^{1/x} = e^{+\infty} = +\infty \quad y \quad \lim_{x\to 0-} e^{1/x} = e^{-\infty} = 0$$

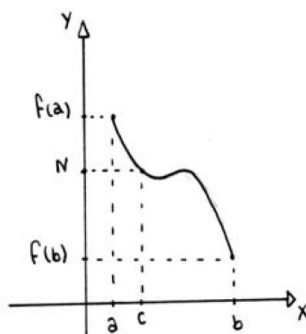
En un dibujo, esto es:



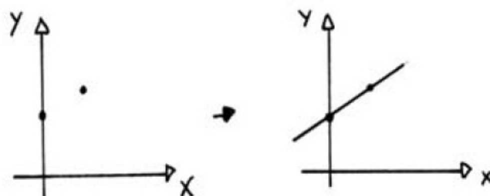
Vemos que la discontinuidad en x = 0 es esencial, luego no existe un a ϵ R tal que f(x) resulte continua.

Teorema de los valores intermedios

Si f(x) es una función continua en el intervalo cerrado [a,b] en donde f(a) ≠ f(b) y si N es cualquier número entre f(a) y f(b) entonces existe al menos un número c entre a,b tal que f(c) = N.



Esto quiere decir que si f(x) es continua en el [a,b] tomará todos los valores entre f(a) y f(b), es como que pasa por todos los valores intermedias entre f(a) y f(b), es por esto que cuando tenemos una recta, decimos que con dos puntos nos alcanza para trazarla porque como sabemos que es continua pasa por todos los valores intermedios…



Si no fuera continua, habría un salto en el medio, y ya no podríamos trazar esa recta.

Hagamos un ejercicio con esto:

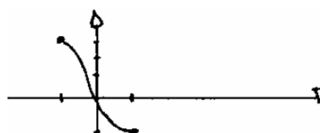
Considerar la función continua f(x) = x3 - 3x + 1. Mostrar que la ecuación f(x) = 0 tiene al menos una solución en el intervalo (-1,1)

La ecuación de la que nos hablan, f(x) = 0, no es otra cosa que calcular las raíces. Pero este ejercicio no nos pide tanto: sólo que verifiquemos si tiene una raíz en ese intervalo.

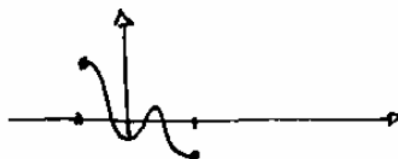
La función $f(x) = x^3 - 3x + 1$ es re-continua en todo x (es un polinomio). Entonces observemos sus valores cuando x es, por ejemplo, 1 y - 1:

$$f(-1) = (-1)^3 - 3.(-1) + 1 = - 1 + 3 + 1 = 3$$
$$f(1) = 1^3 - 3.1 + 1 = 1 - 3 + 1 = - 1$$

Dibujemos:



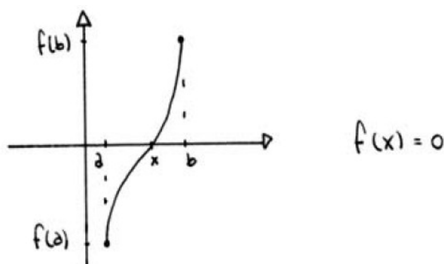
Porqueto que el dibujo tiene que ser continuo. Por suporqueto que puede cortar más veces, como en este otro dibujo:



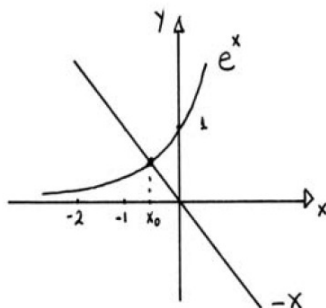
Pero en todo caso encontramos que por lo menos hay una raíz. Entonces, la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$ tiene al menos una solución.

Teorema de Bolzano

Si f(x) es una función continua en el intervalo cerrado [a , b] y f(a) ≠ f(b) pero ahora además los signos de f(b) y f(a) son distintos, entonces existe algún valor de X entre a y b en donde f(x) = 0.



Este teorema nos "garantiza" la existencia de raíces para una función f(x) siempre y cuando sea continua en un cerrado [a,b] y en sus extremos tenga distinto signo.
Este teorema es muy importante, por ejemplo la ecuación $e^X = -X$ ¿ Tiene solución ?
No podemos despejar la letra x, ¿ Entonces qué hacemos ?
Pensemos en la función $f(X) = e^x + x$, resolver la ecuación es como buscar las raíces de f(X):
$f(x) = 0 \rightarrow e^x + x = 0 \rightarrow e^x = -x$. Esta función es continua por ejemplo en el intervalo [-2,0] y además $f(-2) = e^{-2} + (-2) \approx -1{,}86$ y $f(0) = 1 \rightarrow$ ¿ Cambia de signo ? El teorema de Bolzano garantiza que existe algún $x_O \in [-2,0]$ tal que: $f(x_O) = 0 \rightarrow e^{X_o} + x_O = 0 \rightarrow \underline{e^{X_o} = -x_O}$ y por lo tanto x_O es solución de la ecuación. El teorema no nos dice quien es x_O, pero por lo menos nos dice que existe ! !
Si graficamos las funciones originales e^x y $-x$ vemos que:



Realmente existe un valor x_O entre -2 y 0 en donde las funciones e^x y –x tienen el mismo valor. Esta es solo una de las aplicaciones del teorema de Bolzano, a medida que avancemos en la materia nos encontraremos con otras.

Ejercicio: **adaptar convenientemente el teorema de Bolzano para probar que la ecuación** $f(x) = \frac{x^2+1}{x+2} + \frac{x^4+1}{x-3}$ **tiene alguna solución en el intervalo (-2 , 3)**

¿Lo de siempre? Si llamamos $f(x) = \frac{x^2+1}{x+2} + \frac{x^4+1}{x-3}$ no podemos usar el teorema de Bolzano en el intervalo (-2,3), porque -2 no está en el dominio de f y 3 tampoco (en esos puntos, la función no es continua.
Lo que vamos a hacer es encontrar un intervalo [a,b] que esté incluido en (-2,3) tal que f(a) y f(b) tengan signos oporquetos. En ese intervalo [a,b] f(x) resultará continua porque $x + 2 \neq 0$ y $x - 3 \neq 0$ para todo x en ese intervalo.
Esto es porque los numeradores son continuos por ser polinomios y además la suma de funciones continua también es continua. Lo mismo con la división, si el denominador no es 0. Veamos entonces:

$$f(0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} > 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3} < 0$$

Como el intervalo [0,1] está incluido en el intervalo (-2,3), podemos decir que f es continua en [0,1] y cambia de signo en los extremos. Entonces, hay un x_0 tal que $f(x_0) = 0$.

Ejercicios

Ahora que ya vimos todos los diferentes tipos de límite que vas a ver en esta materia, podemos hacer ejercicios sacados de la práctica, y de exámenes, tanto parciales como finales. Los ejercicios que te podrían tomar en exámenes, suelen ser parecidos a los de la sección "problemas varios".
La diferencia con los de la primera parte (como los que hicimos recién) es que pueden llegar a relacionar distintos tipos de límite, y hasta vincularse con prácticas anteriores.
Por eso, no sólo es importante saber los conceptos, sino cuándo y cómo usarlos. Vamos con los ejercicios entonces:

1.- La función $f(x) = \frac{4x^2-1}{(2x-1)(x-1)}$ tiene asíntotas

☐ y = 4, x = -1/2 y x = 1 ☐ x = -1/2 y x = 1 ● y = 2 y x = 1 ☐ y = 4 y x = 1

Hay tres tipos de asíntota. Mirando las opciones, podemos ver que sólo podrían ser de dos tipos: verticales (x = k) u horizontales (y = k). Recordemos cómo se calculaba cada una:

ASÍNTOTAS VERTICALES: son aquellos valores del eje x en los cuales el límite tiende a + o - infinito. ¿Cómo se obtienen esos puntos? Calculando el dominio de la función, es decir, donde se puede calcular. En este caso, hay una división de polinomios. Los polinomios no tienen problemas de dominio, pero las divisiones sí: el denominador, la parte de abajo, no puede valer 0.
Veamos cuándo sucede esto:

$$(2x - 1) . (x - 1) \neq 0$$

Nos queda un producto (una multiplicación) igualado a 0. Eso significa que nos quedan dos posibilidades, y hay que analizarlas por separado:

$$2x - 1 \neq 0 \quad ó \quad x - 1 \neq 0$$
$$x \neq {}^{1}/_{2} \quad ó \quad x \neq 1$$

Nos quedaron dos valores de x. ¿Eso significa que son asíntotas verticales? Todavía no! Falta calcular los límites:

Para $x = {}^{1}/_{2}$:

$$\lim_{x\to 1/2} \frac{4x^2 - 1}{(2x-1)(x-1)} = \lim_{x\to 1/2} \frac{4x^2 - 1}{2x^2 - 3x + 1}$$

Ahora factorizamos $4x^2 - 1$, tomando factor común 4. Nos queda $4(x^2 - {}^{1}/_{4})$. Si le buscamos las raíces a lo que nos quedó entre paréntesis:

$$x^2 - {}^{1}/_{4} = 0 \Rightarrow x^2 = {}^{1}/_{4} \Rightarrow | x | = {}^{1}/_{2} \Rightarrow x = {}^{1}/_{2} \text{ ó } x = -{}^{1}/_{2}$$

Entonces, $4x^2 - 1$ nos queda igual a $4(x + {}^{1}/_{2})\,(x - {}^{1}/_{2})$

Volviendo al límite:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{2x^2 - 3x + 1} = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{4\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)}{(2x-1)(x-1)} = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{4(x + 1/2)(x - 1/2)}{2(x - 1/2)(x-1)} =$$
$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{2(x + 1/2)}{(x-1)} = \frac{2(1/2 + 1/2)}{(1/2 - 1)}) \frac{2(1)}{-1/2} = -4$$

¡El límite nos dio -4, un número! Eso significa que en $x = {}^{1}/_{2}$ no hay una asíntota vertical.

Para x = 1:

$$\lim_{x \to 1} \frac{4x^2 - 1}{(2x-1)(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{4x^2 - 1}{2x^2 - 3x + 1}$$

Si reemplazamos por 1, nos queda una indeterminación de tipo 3 / 0, y eso tiende a + ∞. Eso quiere decir que hay una asíntota vertical en x = 1, y esa es la única de ese tipo que hay. Así que ya podemos descartar la primera y la segunda opción.

ASÍNTOTAS HORIZONTALES: Existen cuando, al tomar el límite cuando x tiende a + ó - infinito, el resultado es un número. Esto quiere decir que si el límite nos da infinito, NO hay asíntota horizontal (ojo con poner A.H. = + ∞! Eso está mal!)
Así que no nos queda otra que calcular estos límites. Pero fijate una cosa: los grados de los polinomios son pares, así que tomar el límite para + ó - ∞ daría lo mismo, ya que potencia de grado par da siempre positivo. Si no te dabas cuenta de eso, lo que iba a pasar es que ibas a calcular dos límites, y te iban a dar lo mismo, si hacías bien las cuentas.
Veamos cómo queda:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4x^2 - 1}{2x^2 - 3x + 1}$$

Tomo factor común x^2 arriba y abajo y queda:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4x^2 - 1}{2x^2 - 3x + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2\left(\frac{4x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac{2x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{4 - \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

Ya se nos fue la indeterminación, así que podemos calcular el límite:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4 - \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{4 - 0}{2 - 0 + 0} = \frac{4}{2} = 2$$

Entonces, hay una asínota horizontal en y = 2. Así que la respuesta es que f(x) tiene asíntotas en **y = 2 y x = 1**.

2.- La función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{2 + e^{-3/x}} & si \quad x \neq 0 \\ k & si \quad x = 0 \end{cases}$ es continua en x = 0 para

☐ $k = \frac{5}{2} = 0$ ☐ todo $k \in \Re$ ● ningún valor de k ☐

Nos piden que calculemos el valor de k para el cual esta función es continua en x = 0. Recordemos que para que esto suceda, f (0) debe valer lo mismo para ambos tramos de la función.

Podríamos reemplazar en el primer tramo, usar ese valor para k y listo. Pero tenemos un problema: hay una indeterminación en el exponente de e, porque hay una división por 0. ¿Entonces? Hay que calcular el límite cuando x tiende a 0, no queda otra. IMPORTANTE: en este caso, como $x \neq 0$, tenemos que calcular dos límites: por derecha (cuando x tiende a 0^+) y por izquierda (cuando x tiende a 0^-). Si son iguales, el resultado que nos de es el valor de k. Si son distintos, la respuesta correcta será "ningún valor de k".
Veamos:

POR DERECHA: $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{5}{2 + e^{-3/x}}$

Fijate una cosa: 0^+ es un número positivo que se acerca infinitamente a 0, como podría ser 0,0001. Si hacemos 3 dividido ese número, nos daría algo que tiende a + ∞ (recordá que dividir un número por algo que tiende a 0 da siempre infinito).
Entonces, en el denominador (abajo) nos quedaría algo como esto: $2 + e^{+\infty}$. Eso no es indeterminado, tiende a infinito. Ahora tenemos un número dividido infinito, y eso tiende a 0, así que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{5}{2 + e^{-3/x}} \xrightarrow{x \to 0^+} 0$$

POR DERECHA: $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{5}{2 + e^{-3/x}}$

Acá ocurre algo distinto. 0^- es un número negativo que se acerca infinitamente a 0, y si hacemos 3 dividido ese número, nos daría algo que tiende a - ∞, más o menos como antes. Pero NO podemos afirmar que $e^{-\infty}$ tienda a - ∞. ¿Por qué? Para empezar, las exponenciales nunca se hacen negativas (si no tienen un menos adelante de la e, al menos), así que es imposible que tienda a - ∞. Además, cuando tenemos un número negativo muy grande en el exponente, todo eso tiende a 0 (probalo en la calcu si querés). Así que el límite quedaría:

$$\lim_{x \to 0^{-+}} \frac{5}{2 + e^{-3/x}} = \frac{5}{2 + 0} \xrightarrow{x \to 0^-} \frac{5}{2}$$

¡Nos dieron dos valores distintos de k! Entonces, la respuesta correcta es:

ningún valor de k

Nota: ¿qué pasaba si no te dabas cuenta de que había que calcular dos límites? Respuesta: hubieras dado como soluciones k = 0 ó k = 5 / 2, y hubiera estado mal. Así que hay que tener mucho cuidado!

3.- Todas las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^4 + 9}} + 5$ son

☐ x = 6 ☐ x = 3 y x = -3 ☐ y = 3 e y = -3 ● y = 6

Hay tres tipos de asíntota. Mirando las opciones, podemos ver que sólo podrían ser de dos tipos: verticales (x = k) u horizontales (y = k). Recordemos cómo se calculaba cada una:
ASÍNTOTAS VERTICALES: En este caso, hay una suma entre un número y una división. El número no nos cambia el dominio, así que concentrémonos en la división: en el numerador hay un polinomio, y en el denominador hay una raíz cuadrada (que tiene otro polinomio adentro).
Acá hay dos "problemas" posibles: la división no puede tener denominador 0, porque no se puede dividir por 0. Y la raíz cuadrada tiene que ser positiva. Es decir:

$$\sqrt{x^4+9} \neq 0 \qquad y \qquad \sqrt{x^4+9} \geq 0$$

Podemos juntar estos dos problemas en uno solo. ¿Por qué? Porque si bien la raíz cuadrada en general puede ser 0, está en el denominador, así que si da 0, no se estaría cumpliendo con la otra restricción. Así que nos queda:

$$\sqrt{x^4+9} > 0 \Rightarrow x^4+9 > 0 \Rightarrow x^4 > -9$$

¡Ojo acá! Nos quedó una potencia de grado par igualada a un número negativo, y eso no se puede calcular en los reales. ¿Eso significa que hay un error? No, que sea cual sea el valor de x, la función se va a poder calcular sin problemas. O sea, que el dominio es R, y NO hay asíntotas verticales. Ya podemos descartar las primeras dos opciones.

ASÍNTOTAS HORIZONTALES: Fijate una cosa: los grados de los polinomios son pares, así que tomar el límite para + ó - ∞ daría lo mismo, ya que potencia de grado par da siempre positivo. Si no te dabas cuenta de eso, lo que iba a pasar es que ibas a calcular dos límites, y te iban a dar lo mismo, si hacías bien las cuentas.
Esto también sirve para descartar la tercera opción, ya que ahora sabemos que el límite nos va a dar una sola cosa.
Pero vamos a calcularlo igual por las dudas.
Hay dos maneras de hacerlo: tomar denominador común y transformar todo en una única división, o calcular el límite de la división y sumarle 5 (esto se puede por álgebra de límites). Hagamos esto último, es más corto, hay que hacer menos cuentas:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^4+9}}$$

Ahora, para calcular el límite, dividimos arriba y abajo por x^2. Recordá que para meterlo en la raíz, lo tenemos que elevar al cuadrado nuevamente, porque $x^2 = \sqrt{x^4}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^4+9}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{\sqrt{x^4+9}}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^4+9}{x^4}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^4}{x^4}+\frac{9}{x^4}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{x^4}}} = \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1$$

El límite nos dio 1. Entonces el límite original quedaría:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^4+9}} + 5 = 1 + 5 = 6$$

La respuesta es **y = 6**.

---

4) ¿Para qué valores de la constante a la siguiente función es continua?

$$f(x) = \begin{cases} 2 + e^{1/x} & \text{si} \quad x < 0 \\ 3x + a & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Debemos ver que empalmen bien ambas ramas, entonces:

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \to 0-} 2 + e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0+} 3x + a$$

El exponente 1/x tiende a - ∞ si x → 0^-. Entonces $e^{-\infty}$ → $1/e^{\infty}$ → 0. Nos queda:

2 + 0 = a ➔ a = 2

---

5) Sea f(x) = $\frac{2x^4}{x^3 + 1}$. **Hallar los valores de a y b para los cuales**

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - (ax + b)\right) = 0$$

Calculemos el límite hasta que nos podamos sacar de encima la indeterminación, que es de tipo ∞/∞ - ∞ (dos indeterminaciones juntas!):

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - (ax + b)\right) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x^4}{x^3 + 1} - ax - b \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^4 - ax(x^3 + 1) - b(x^3 + 1)}{x^3 + 1} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^4 - ax^4 - ax - bx^3 - 1}{x^3 + 1} \underbrace{=}_{\text{factor común}} \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 \left(2x - ax - \frac{a}{x^2} - b - \frac{1}{x^3} \right)}{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^3} \right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(2 - a)x - \frac{a}{x^2} - b - \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{1}{x^3}}$$ y si x → +∞ esto tiende a

(2 - a)x - b

Como este límite debe dar 0, podemos decir que a = 2 y b = 0.
